Abiturprüfung 2016

Mecklenburg-Vorpommern

Pflichtaufgaben

ohne Hilfsmittel

Zuerst nur die Prüfungsaufgaben,
dann die sehr ausführlichen Musterlösungen
und Hintergrundwissen
zum Trainieren

Datei Nr. 75160

Stand 21. Juli 2016

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.schule

Vorwort

Es wurden zwei Gruppen von Aufgaben gestellt A und B

Teil A ist von allen Prüfungsteilenhmern zu bearbeiten.
Aufgabe A0 ist ohne Zuhilfenahme von Tafelwerk oder Taschenrechner zu bearbeiten. Bearbeitungsdauer 45 Minuten.
Von den Aufgaben A1, A2 und A3 sind **zwei** auszuwählen

Teil B ist für Prüfungsteilnehmen, die die Prüfung unter erhöhten Anforderungen (LK-Niveau) ablegen. Diese Schüler müssen die Pflichtaufgabe B0 ohne Hilfsmittel bearbeiten und zusätzlich aus den Aufgaben B1 und B2 **eine** auswählen.

Dieser Aufgabensatz enthält Aufgaben, die ohne Hilfsmittel zu bearbeiten sind.

Aufgabe A0 (beinhaltet die Aufgaben 1-3 des Arbeitsblattes)

Arbeitsblatt

1 Analysis	BE
Gegeben ist die Zahlenfolge (a_k) mit $a_{k+1} = a_k + 4$ und $a_3 = 17$, wobei $k \in \mathbb{N},\ k > 0$ gilt.	
1.1 Berechnen Sie a_5.	2
1.2 Die Glieder von (a_k) können auch mit Hilfe der Gleichung $a_k = t \cdot k + r\ \ (t, r \in \mathbb{R})$ berechnet werden. Bestimmen Sie die Werte für t und r.	3

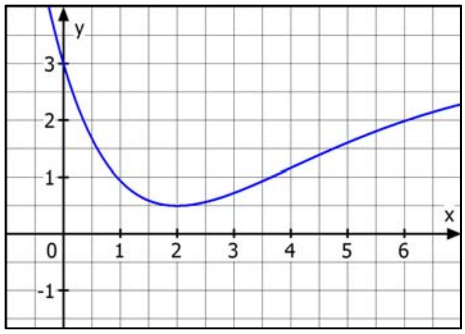
2 Analysis	BE
Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -x^2 + 1$ und $x \in \mathbb{R}$. Ihr Graph ist G.	
2.1 Berechnen Sie die Stelle x, an der die Gerade mit der Gleichung $y = -3x + \frac{13}{4}$ eine Tangente an G ist.	2
2.2 Die x-Achse und G begrenzen eine Fläche vollständig. Begründen Sie, dass der Inhalt dieser Fläche kleiner als 2 ist.	3

3 Analytische Geometrie	BE
Gegeben sind die Punkte $A(4\,|\,2\,|\,6)$, $B(6\,|\,3\,|\,8)$ und für jeden Wert von $z \in \mathbb{R}$ ein Punkt $C(2\,|\,1\,|\,z)$.	
3.1 Bestimmen Sie z so, dass der Punkt C auf der Geraden AB liegt	2
3.2 Der Punkt A liegt in der Ebene $x + 2y + 2z = 20$. Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes, der einen Abstand 6 zu dieser Ebene besitzt.	3

4 **Stochastik**	BE
In einer Urne befinden sich vier Kugeln, die mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 beschriftet sind. Zwei Kugeln werden mit einem Griff gezogen. Die Zufallsgröße X gibt die Summe der Zahlen auf den gezogenen Kugeln an.	
4.1 Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten der Werte von X nicht gleichverteilt sind.	2
4.2 Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.	3

Aufgabe B0 (beinhaltet die Aufgaben 1-4 des Arbeitsblattes)

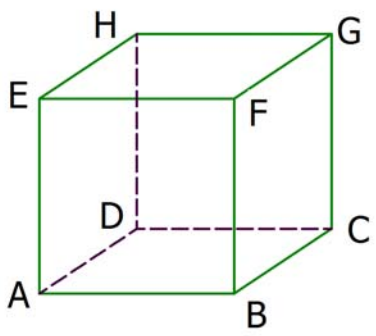
Arbeitsblatt

1 Analysis	BE
Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f. 	
1.1 Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für $\int_3^5 f(x)\,dx$	2
Die Funktion F ist die in $\mathbb{R}$ definierte Stammfunktion von f mit $F(3) = 0$.	
1.2 Geben Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Ableitung von F an der Stelle x = 2 an.	1
1.3 Zeigen Sie, dass $F(b) = \int_3^b f(x)\,dx$ mit $b \in \mathbb{R}$ gilt.	2

2 **Analysis**	BE
Für jeden Wert von a $(a \in \mathbb{R}, a > 0)$ ist die Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = a \cdot e^{a+x}$ $(x \in \mathbb{R})$. Die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(-1 \mid f_a(-1))$ wird mit t_a bezeichnet.	
2.1 Weisen Sie nach, dass für jeden Wert von a die Tangente t_a durch die Gleichung $y = a \cdot e^{a-1} \cdot x + 2a \cdot e^{a-1}$ beschrieben werden kann.	3
2.2 Für jeden Wert von a schließen die Tangenten t_a und die beiden Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von a.	2

3 **Analytische Geometrie**	BE

Betrachtet wird der abgebildete Würfel ABCDEFG.
Die Eckpunkte D, E, F und H dieses Würfels besitzen in einem kartesischen Koordinatensystem die folgenden Koordinaten: $D(0\,|\,0\,|\,-2)$, $E(2\,|\,0\,|\,0)$, $F(2\,|\,2\,|\,0)$, $H(0\,|\,0\,|\,0)$



3.1 Zeichnen Sie in die Abbildung die Koordinatenachsen ein und bezeichnen Sie diese. Geben Sie die Koordinaten des Punktes A an.	2
3.2 Der Punkt P liegt auf der Kante FB des Würfels und hat vom Punkt H den Abstand 3. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P.	

4 **Stochastik**	BE
Bei einem Zufallsexperiment wird eine ideale Münze so lange geworfen, bis zum zweiten Mal Zahl (Z) oder zum zweiten Mal Wappen (W) oben liegt. Als Ergebnismenge wird festgelegt: $\{ZZ, WW, ZWZ, ZWW, WZZ, WZW\}$,	
4.1 Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment kein Laplace-Experiment ist.	2
4.2 Die Zufallsgröße X ordnet jedem Ergebnis die Anzahl der entsprechenden Münzwürfe zu. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.	3

LÖSUNGEN

Lösung: Aufgabe A0

Arbeitsblatt

1 Analysis	BE
Gegeben ist die Zahlenfolge (a_k) mit $a_{k+1} = a_k + 4$ und $a_3 = 17$, wobei $k \in \mathbb{N},\ k > 0$ gilt.	
1.1 Berechnen Sie a_5. $a_4 = a_3 + 4 = 17 + 4 = 21,\ \ a_5 = a_4 + 4 = 21 + 4 = 25$ Oder so: $a_5 = a_3 + 2 \cdot 4 = 17 + 8 = 25$	2
1.2 Die Glieder von (a_k) können auch mit Hilfe der Gleichung $a_k = t \cdot k + r\ \ (t, r \in \mathbb{R})$ berechnet werden. Bestimmen Sie die Werte für t und r. Zur Bestimmung von zwei Unbekannten t und r benötigt man zwei Gleichungen: (1) Für k = 3: $a_3 = t \cdot 3 + r \ \Leftrightarrow\ 17 = 3t + r$ (2) Für k = 4: $a_4 = t \cdot 4 + r \ \Leftrightarrow\ 21 = 4t + r$ Elimination von r durch (2) – (1): $4 = t$ In (1): $17 = 12 + r \ \Leftrightarrow\ r = 5$ Ergebnis: $a_k = 4 \cdot k + 5$	3

2 Analysis

BE

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -x^2 + 1$ und $x \in \mathbb{R}$. Ihr Graph ist G.

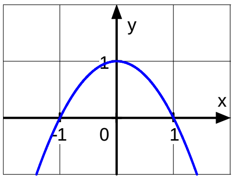
2.1 Berechnen Sie die Stelle x, an der die Gerade mit der Gleichung $y = -3x + \frac{13}{4}$ eine Tangente an G ist. **2**

Die Tangente hat die Steigung -3. Diese kann mit $f'(x)$ berechnet werden:

$f'(x) = -2x = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2}$

2.2 Die x-Achse und G begrenzen eine Fläche vollständig. **3**

Begründen Sie, dass der Inhalt dieser Fläche kleiner als 2 ist.



1. Begründung: Das Schaubild zeigt es.

2. Begründung: $A = \int_{-1}^{1} \left(-x^2 + 1\right) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1} = \left[-\frac{1}{3} + 1\right] - \left[-\frac{1}{3} \cdot (-1) - 1\right] = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} < 2$

Oder $A = 2 \cdot \int_{0}^{1} \left(-x^2 + 1\right) dx = 2 \cdot \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{0}^{1} = 2 \cdot \left[-\frac{1}{3} + 1\right] = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} < 2$

3. Begründung: Die Parabel durchschneidet zwei Einheitsquadrate, also ist die Fläche kleiner als 2.

3 Analytische Geometrie

BE

Gegeben sind die Punkte $A(4|2|6)$, $B(6|3|8)$ und für jeden Wert von $z \in \mathbb{R}$ ein Punkt $C(2|1|z)$.

3.1 Bestimmen Sie z so, dass der Punkt C auf der Geraden AB liegt **2**

1. Lösung: Gleichung der geraden (AB): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Punktprobe mit C: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2 = 4 + 2t \\ 1 = 2 + t \\ z = 6 + 2t \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} t = -1 \\ t = -1 \\ z = 4 \end{Bmatrix}$

2. Lösung: C liegt genau dann auf der Geraden (AB), wenn gilt: $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$

d. h. $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ z-6 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2k = -2 \\ k = -1 \\ \end{Bmatrix} \Leftrightarrow k = -1$

Damit folgt: $z - 6 = -2 \Leftrightarrow z = 4$

3.2 Der Punkt A liegt in der Ebene $x + 2y + 2z = 20$. **3**

Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes, der einen Abstand 6 zu dieser Ebene besitzt.

Den Abstand eines Punktes von einer Ebene berechnet man mit Hilfe der Hesseschen Normalform: $\frac{x + 2y + 2z - 30}{3} = 0$

Setzt man einen Punkt ein, soll das Ergebnis 6 sein:

$$\frac{x + 2y + 2z - 30}{3} = 6 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 30 = 18$$

Jetzt kann man zwei Koordinaten frei wählen, z.B. y = z = 0 $\Rightarrow x - 30 = 18 \Leftrightarrow x = 48$

Ergebnis: $P(48|0|0)$

## 4 Stochastik	BE

In einer Urne befinden sich vier Kugeln, die mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 beschriftet sind.
Zwei Kugeln werden mit einem Griff gezogen.
Die Zufallsgröße X gibt die Summe der Zahlen auf den gezogenen Kugeln an.

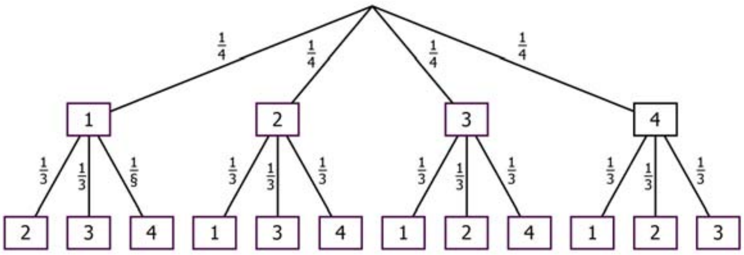
4.1 Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten der Werte von X nicht gleichverteilt sind. **2**

Die Augensumme X = 2 tritt auf mit der Wahrscheinlichkeit $P(X=2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

Die Augensumme X = 3 tritt doppelt auf, also bei 1+2 und 2+1

mit der Wahrscheinlichkeit $P(X=3)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{1}{6}$

Das Baumdiagramm war nicht verlangt.



4.2 Bestimmen Sie den Erwartungswert von X. **3**

x	2	3	4	5	6	7	8
$P(X)=x$	–	$2\cdot\frac{1}{12}$	$2\cdot\frac{1}{12}$	$4\cdot\frac{1}{12}$	$2\cdot\frac{1}{12}$	$2\cdot\frac{1}{12}$	–

$E(X)=\left(2\cdot\boxed{3}+2\cdot\boxed{4}+4\cdot\boxed{5}+2\cdot\boxed{6}+2\cdot\boxed{7}\right)\cdot\frac{1}{12}=\frac{60}{12}=5$

Lösung: Aufgabe B0

Arbeitsblatt

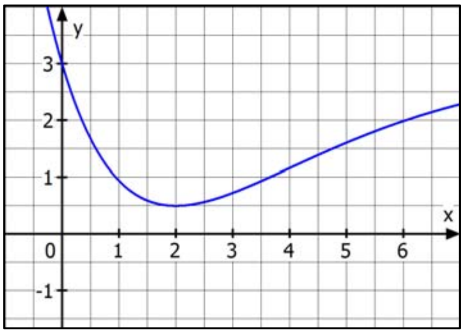
1 Analysis BE

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.

Hinweis (nicht verlangt):

Die Funktion f hat diese Gleichung:

$f(x) = -x \cdot e^{-(x-2{,}45)/2} + 3$

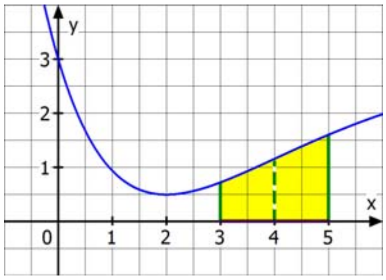


1.1 Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für $\int_3^5 f(x)\,dx$ 2

Die Fläche hat näherungsweise die Form eines Trapezes.

Flächeninhaltsformel: $A_{Tr} = m \cdot h$

Die Mittelparallele ist gestrichelt eingezeichnet und hat etwa die Länge 1,2. Die Höhe h ist hier eine waagerechte Strecke mit h = 2. Damit erhält man $A_{Tr} = 2{,}4$ (FE)



Die Funktion F ist die in $\mathbb{R}$ definierte Stammfunktion von f mit $F(3) = 0$.

1.2 Geben Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Ableitung von F an der Stelle x = 2 an. 1

Wenn F die Stammunktion von f ist, dann gilt: $F'(x) = f(x)$

Daher folgt: $F(2) = f(2) = 0{,}5$

1.3 Zeigen Sie, dass $F(b) = \int_3^b f(x)\,dx$ mit $b \in \mathbb{R}$ gilt. 2

$\int_3^b f(x)\,dx = F(b) - \underbrace{F(3)}_{=0} = F(b)$

## 2 Analysis	BE
Für jeden Wert von a $\left(a \in \mathbb{R}, a > 0\right)$ ist die Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = a \cdot e^{a+x}$ $\left(x \in \mathbb{R}\right)$. Die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $\left(-1 \mid f_a(-1)\right)$ wird mit t_a bezeichnet.	
2.1 Weisen Sie nach, dass für jeden Wert von a die Tangente t_a durch die Gleichung $y = a \cdot e^{a-1} \cdot x + 2a \cdot e^{a-1}$ beschrieben werden kann.	3

y-Koordinate: $f_a(-1) = a \cdot e^{a-1}$

Ableitung: $f_a'(x) = a \cdot e^{a+x}$

Tangentensteigung: $f_a'(-1) = a \cdot e^{a-1}$

Tangentengleichung: $y - f_a(-1) = f_a'(-1)(x+1)$

d. h. $y - a \cdot e^{a-1} = a \cdot e^{a-1} \cdot (x+1)$

Daraus folgt $y = a \cdot e^{a-1} \cdot x + 2a \cdot e^{a-1}$

2.2 Für jeden Wert von a schließen die Tangenten t_a und die beiden Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von a.	2

Schnitt der Tangente t_a mit der x-Achse:

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = a \cdot e^{a-1} \cdot x + 2a \cdot e^{a-1} \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot e^{a-1} \cdot x = -2a \cdot e^{a-1} \quad \Leftrightarrow \quad x = -2: \quad A(-2 \mid 0)$$

Schnitt der Tangente t_a mit der y-Achse:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = a \cdot e^{a-1} \cdot \boxed{0} + 2a \cdot e^{a-1} = 2a \cdot e^{a-1} \qquad B\left(0 \mid 2a \cdot e^{a-1}\right)$$

Damit hat die Grundseite die Länge 2 und die Höhe $2a \cdot e^{a-1}$.

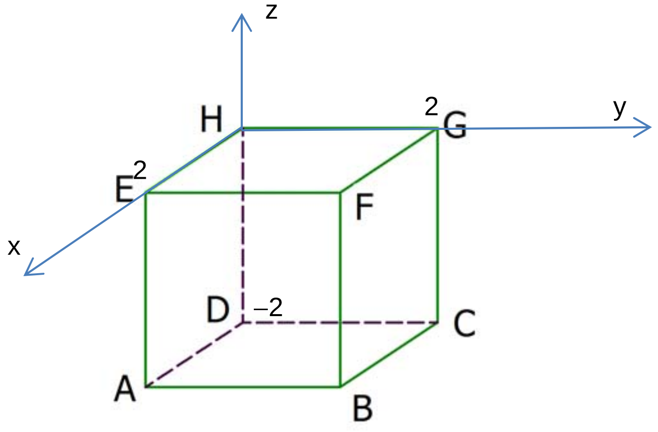
Flächeninhalt des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2a \cdot e^{a-1} = 2a \cdot e^{a-1}$

3 Analytische Geometrie

BE

Betrachtet wird der abgebildete Würfel ABCDEFG.

Die Eckpunkte D, E, F und H dieses Würfels besitzen in einem kartesischen Koordinatensystem die folgenden Koordinaten: $D(0|0|-2)$, $E(2|0|0)$, $F(2|2|0)$, $H(0|0|0)$



3.1 Zeichnen Sie in die Abbildung die Koordinatenachsen ein und bezeichnen Sie diese. Geben Sie die Koordinaten des Punktes A an. — 2

$A(2|0|-2)$

3.2 Der Punkt P liegt auf der Kante FB des Würfels und hat vom Punkt H den Abstand 3. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P.

Die Gerade (BF) ist parallel zur z-Achse und hat die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Also ist $P(2|2|r)$ und daher $\overline{OP} = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ r \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+4+r^2}$

Bedingung: $\overline{OP} = 3 \iff \sqrt{8+r^2} = 3 \iff 8+r^2 = 9 \iff r^2 = 1 \iff r = \pm 1$

P liegt unterhalb von F, also kommt nur r = -1 in Frage.

Ergebnis: $P(2|2|-1)$

4 **Stochastik**	BE
Bei einem Zufallsexperiment wird eine ideale Münze so lange geworfen, bis zum zweiten Mal Zahl (Z) oder zum zweiten Mal Wappen (W) oben liegt. Als Ergebnismenge wird festgelegt: $\{ZZ, WW, ZWZ, ZWW, WZZ, WZW\}$,	
4.1 Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment kein Laplace-Experiment ist. Ein Zufallsexperiment heißt **Laplace-Experiment**, wenn alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen. Das Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit $P(ZZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, aber $P(ZWZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$	2
4.2 Die Zufallsgröße X ordnet jedem Ergebnis die Anzahl der entsprechenden Münzwürfe zu. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.	3

Ergebnis	ZZ	WW	ZWZ	ZWW	WZZ	WZW
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
n	2	2	3	3	3	3

Erwartungswert für die Anzahl n der Münzwürfe:

$$E(n) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 + 3 \cdot \frac{1}{8} \cdot 4 = 1 + \frac{3}{2} = 2{,}5$$